ЗАДАНИЕ № 1 (максимальное количество баллов – 7)

$$\underbrace{111\ldots111}_{2023}\underbrace{555\ldots555}_{2022}\underbrace{6}_{1} \iff \underbrace{111\ldots111}_{2023}\underbrace{555\ldots555}_{2023-1}6$$

рассмотрим на более простом примере

1) 111556 является квадратом числа 334, т.е $334^2=111556$

2) 1111155556 является квадратом числа 33334 т.е $33334^2=1111155556$

Закономерность в том, что сколько пятерок в изначальном числе, из которого мы должны извлечь корень, столько же будет и ~~пяте~~ троек в итоговом числе, поэтому:

$$\underbrace{111\ldots111}_{2023}\underbrace{555\ldots555}_{2022}6 = (\underbrace{333\ldots333}_{2022}4)^2$$ ч.т.д.

ШИФР УЧАСТНИКА Х-10-2

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 1

Набранные баллы 6 Подписи членов жюри

ШИФР УЧАСТНИКА М-10-2

ЗАДАНИЕ №2 (максимальное количество баллов – 7)

№2 $a, b, c > 0$, a, b, и c – члены а.п.

Запишем их так – $a = b - d$; $b = a + d$; $c = a + 2d$

$ax^2 + bx + c = 0$ $x_0 < -2$ попробуем это доказать

x_0 – единственный корень, то сам корень будет равен $\frac{b}{2a} = x_0$

$\frac{b}{2a} < -2$; $\frac{a+d}{2(b-d)} = \cancel{\frac{a+d}{2(b-d)}} = \frac{a+d}{2b-2d} \overline{<} 2$; ~~подел~~ перевернем дробь;

$\frac{2b-2d}{a+d} \cancel{>} -\frac{1}{2}$; поделим $2b-2d$ на $a+d$ $\begin{array}{r|l} 2b-2d & a+d \\ -2a-2d & -2 \\ \hline 2a+2b & \end{array}$

$-2 + \frac{2a+2b}{a+d} > -\frac{1}{2}$; $\frac{2a+2b}{a+d} > \frac{3}{2} \Big| \cdot \frac{1}{2} = \frac{\cancel{2}a+b}{a+d} > \frac{3}{4}$; $\frac{a+b}{b} > \frac{3}{4}$;

$\frac{a+b}{b} \cancel{>} 1$, т.к $\rightarrow a + b > b$, т.к и a и $b > 0$, значит и больше чем $\frac{3}{4}$

ч.т.д.

ШИФР УЧАСТНИКА М-10-2

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 2

Набранные баллы 5 Подписи членов жюри

ШИФР УЧАСТНИКА М-10-2 | 6

ЗАДАНИЕ №3 (максимальное количество баллов – 7)

№3

$$\frac{(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(-a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{1}{3}$$

a, b, c – стороны треугольника т.е $a>0$; $b>0$; $c>0$

равенство достигается только тогда, когда $a=b=c$

Проверка

~~$\frac{(3+3-3)^2+(3-3+3)^2+(-3+3+3)^2}{(3+3+3)^2} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$~~

получается

$\frac{a^2+a^2+a^2}{9a^2} = \frac{3a^2}{9a^2} = \frac{1}{3}$; достигается когда треугольник равносторонний.

теперь разберёмся с неравенством, раскроем скобки

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \geq$$

$$\frac{3a^2+3b^2+3c^2-2ab-2bc-2ca}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} \geq \frac{1}{3}$$

пусть $a^2+b^2+c^2 = x$; $2(ab+bc+ca) = y$; $\frac{3x-y}{x+y}$; поделим на $x+y$

$-1+\frac{4x}{x+y} \geq \frac{1}{3}$; $\frac{4x}{x+y} \geq \frac{4}{3}$; случай, когда происходит равенство $\frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}$, $\Rightarrow y = 2x$

т.е для соблюдение неравенства надо: $x+y<3x$; $y \leq 2x$

сделаем обратную замену:

$2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0$

$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \geq 0$; $\underset{\geq 0}{(a-b)^2}+\underset{\geq 0}{(a-c)^2}+\underset{\geq 0}{(b-c)^2} \geq 0$

неравенство доказали значит из него следует, что $y \leq 2x$, и так соответственно и изначальное неравенство

ч.т.д

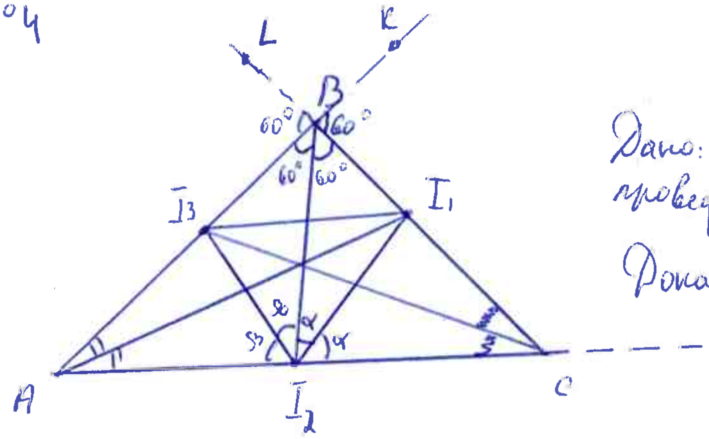
ШИФР УЧАСТНИКА Ы-10-2

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 3

Набранные баллы 5 Подписи членов жюри

ЗАДАНИЕ №4 (максимальное количество баллов – 7)

№4



Дано: $\triangle ABC$; $\angle ABC = 120°$

проведены биссектрисы AI_1 ; BI_2 , CI_3

Доказать: $\angle I_1I_2I_3$ - прямоугольный

Доказательство: 1) рассмотрим $\triangle ABI_2$; продлим AB за точку B, назовем т. K ; $\angle KBC = 180 - \angle ABC$ (как смежные) $= 60°$; заметим, что BC - биссектриса для угла KBI_2 ; внешнего угла $\triangle ABI_2$ ~~Ik AI~~, и соответственно BI_1 тоже биссектриса. Заметим, что AI_1 тоже биссектриса, поэтому по свойству вневписанной окружности I_1 - её центр, поэтому I_2I_1 - биссектриса $\angle BI_2C$, внешнего угла $\triangle ABI_2$.

2) Рассмотрим $\triangle BCI_2$; продлим BC за точку B (т. L) ; угол $LBA = 60°$ как смежный с углом ABC. BI_3 - биссектриса для $\angle LBI_2$ биссектриса внешнего угла ; заметим, что CI_3 - биссектриса внутреннего угла, поэтому мы можем опять применить свойство вневписанной окружности. I_3 - центр вневпис. окр. $\triangle BCI_2$. Следует, что I_2I_3 - бисс внешнего угла $\triangle BI_2C$. Пусть $AI_2I_3 = \cancel{A}I_3I_2B = \beta$; $BI_2I_1 = I_1I_2C = \alpha$.

$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$

$2\alpha + 2\beta = 180°$ |:2

$\alpha + \beta = 90°$

значит $\angle$ ~~BI_2I_3~~ $I_3I_2B + \angle BI_2I_1 = I_1I_2I_3 = \alpha + \beta = 90°$

Ч.Т.Д.

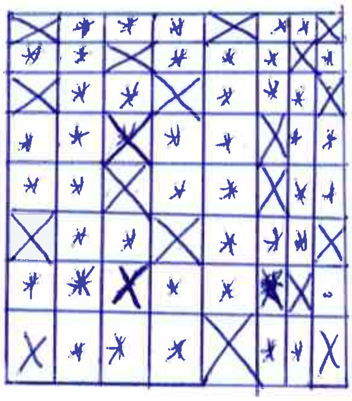
ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 4

Набранные баллы 7 Подписи членов жюри

ЗАДАНИЕ №5 (максимальное количество баллов – 7)

№5

8x8



X – отмеченные клетки

* граничащие клетки с отмеченными

Максимально можно одной отмеченной клеткой захватить 4 отмеченных или не отмеченных клеток, но не все так можно поставить, максимальное количество  в доске 8x8 – 8 штук, больше нельзя, т.к. при каждом выставлении одной такой штуки, будут 4 свободные клетки, но можно ставить на одну свободную из этих клеток, всего так будет 8 раз и из 32 свободных клеток 8 из них ушли на фигуру, что дает 32 - 8 = 24 свободных клеток, 64 - 24 = 40; 40 : 5 (клеток занимает) = 8.

~~Потом (X) выставили оставшиеся клетки~~ 24 свободных клеток у нас осталось, но нам не получится заграничить все клетки например 2x12 или 6x4 или 3x8, для каждого примера будет кол-во граничных клеток от одной отмеченной по-разному, но тем не менее всеравно кол-во клеток должно быть 2x12 = 24; 12 - отмеченных поэтому минимальное количество – 20 (8 + 12)

Ответ: 20 отмеченных клеток

ШИФР УЧАСТНИКА М-10-2

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЗАДАНИЯ № 5

Набранные баллы 0 Подписи членов жюри